



TITLE:

フーリエ変換のspherical means (表現論とIntertwining Operator)

AUTHOR(S):

猪狩, 惺

CITATION:

猪狩, 惺. フーリエ変換のspherical means (表現論とIntertwining Operator). 数理解析研究所講究録 1976, 280: 122-132

ISSUE DATE:

1976-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106035>

RIGHT:

フーリエ変換の spherical means

東北大 理 宿待 惺

d 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^d 上の函数 f に対して, フーリエ変換 \hat{f} を

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

によつて, d 重単位円周 T^d 上の函数 u に対して, フーリエ係数 \hat{u}_μ を

$$\hat{u}_\mu = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} u(x) e^{-i\mu x} dx, \quad \mu \in \mathbb{Z}^d$$

によつて定義する, ここで \mathbb{Z}^d は各成分が整数であるような \mathbb{R}^d の点である.

函数 u のフーリエ級数の収束性を調べる場合, 一つの方法は球形和

$$S_R^0(u)(x) = \sum_{|\mu| < R} \hat{u}_\mu e^{i\mu x}$$

を考察することである. これはラプラス変換に関する固有値の大きさの順に並べた和である. 我々はこれに限って考えることにする. 後程述べるように, S_R^0 はしばしば予集合を生じ

3 の τ Riesz-Bochner 平均

$$S_R^\delta(u)(x) = \sum_{|\mu| < R} \left(1 - \frac{|\mu|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{u}_\mu e^{i\mu x}$$

を被さる. フーリエ変換の Riesz-Bochner 平均も同様にして定義される. それを $S_R^\delta(f)$ とかくことにする.

II. 平均収束. まず, フーリエ変換と級数の L^p -ノルム収束は同値であることを示す. 以下 $1 \leq p \leq \infty$ とする.

\mathbb{R}^d 上の有界函数 φ に対して

$$S_R^\varphi(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{1}{R}\xi\right) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

$$S_R^\varphi(f)(x) = \sum_{\mu} \varphi\left(\frac{1}{R}\mu\right) \hat{u}_\mu e^{i\mu x}$$

と置く.

$$\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = \|S_R^\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(\mathbb{T}^d)} = \|S_R^\varphi\|_{L^p(\mathbb{T}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{T}^d)}$$

と定義する. 次の事実は容易に確かめられる:

- 1) $\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi(\cdot)\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \quad (R > 0),$
- 2) $\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p} = \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_{p'}}, \quad (1/p + 1/p' = 1),$
- 3) φ は \mathbb{R}^d の原点の近傍で連続, $\varphi(0) = 1$, $p < \infty$

とする. そのとき任意の $u \in L^p(\mathbb{T}^d)$ に対して $S_R^\varphi(u) \rightarrow u$

が L^p となるための必要十分条件は,

$$\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{H_p(\mathbb{R}^d)} \leq \text{const} < \infty.$$

フーリエ変換に対しては、更に最初のいくつかの α に対して $\mathcal{D}'\varphi = 0$ ならば、 $\|\varphi\|_{H_p(\mathbb{R}^d)} \leq \text{const}$ が必要十分条件である。

\mathbb{R}^d 上の函数 φ が *regulated* であるとは、 $L^1(\mathbb{R}^d)$ のノルム ≤ 1 なる単位元の近似 $\{a_\varepsilon\}$ が存在して、すべての $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して $\lim \varphi * a_\varepsilon(\xi) = \varphi(\xi)$ をみたすことである。

定理 1 (K. de Leeuw [4]). φ が \mathbb{R}^d 上の *regulated* な函数ならば、

$$\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{H_p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\varphi\|_{H_p(\mathbb{R}^d)} \quad (R > 0).$$

定理 2 (猪俣 [8]). φ は \mathbb{R}^d 上の下連続の集合が零集合であるような函数ならば、

$$\|\varphi\|_{H_p(\mathbb{R}^d)} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{H_p(\mathbb{R}^d)}.$$

従って、特に φ が *regulated* な下連続の集合が零集合ならば、

$$\|\varphi\|_{H_p(\mathbb{R}^d)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{H_p(\mathbb{R}^d)}.$$

以上の事柄から、我々の問題は

$$\varphi(\xi) = \varphi_\delta(\xi) = \begin{cases} (1-|\xi|^2)^\delta & (|\xi| < 1) \\ 0 & (|\xi| \geq 1) \end{cases}$$

とあるとき、

$$\|\varphi_\delta\|_{H_p(\mathbb{R}^d)} < \infty \quad (1)$$

が成立するかという問題を帰着せよ。以下 $d \geq 2$ とす。

これについて知られてゐる結果を列挙すると、

1° (C. Fefferman [5]) $p \neq 2$ のとき (1) は $\delta = 0$ に対して成り立たない。

2° (L. Carleson - P. Sjölín [1]) $d = 2$ とする。
 $4/3 \leq p \leq 4$ かつ、任意の $\delta > 0$ に対して (1) は成り立つ。

2° の別証明として、L. Hörmander [7], C. Fefferman [6], A. Cordoba [3], P. Sjölín [11] があるが、いずれも本質的に $d = 2$ である。

問題 $d > 2$ とする。 $2d/(d+1) \leq p \leq 2d/(d-1)$ かつ、任意の $\delta > 0$ に対して (1) が成り立つか？

現在知られてゐる最もよい結果は P. A. Tomas [14] による。

1° と E. M. Stein の定理 [13] と定理 2 を合せると、

3° $d \geq 2$, $p < 2$ かつ、 $u \in L^p(\mathbb{T}^d)$ が存在して $S_R^0(u)(x)$ は殆んどすべての点で発散する。

3° と同様の論法によつて、 d 次元球上の関数の球面調和函数展開の発散が $L^p(S^d)$ ($p < 2$, $d \geq 2$) に対して示され (猪狩 [9], J.-L. Clerc [2] 参照)。

2. Littlewood-Paley の函数。一変数フーリエ変換の収束問題に対しては Littlewood-Paley の補助函数は決定的な結

果を与えていよう。しかし多変数の場合は概発束の問題と補助函数の有界性は同値である。

G を $GL(d, \mathbb{R})$ の閉部分群, dg を G 上の不変測度, $H = L^2(G, dg)$ とかく。 $t \in L^1_{loc} \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$T_g(x) = \det g \cdot t(gx) \quad x \in \mathbb{R}^d, g \in G$$

とかく。このとき Littlewood-Paley の函数を

$$g_t(f)(x) = \|T_g * f(x)\|_H, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

で定義する。猪狩-倉坪 [11] と同様の方法によつて次の定理を証明することができた。

定理 3. $t \in L^1_{loc} \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ は次の条件をみたすとする;

$$a) \quad \|\widehat{T_g}(\xi)\|_H = \text{const} \neq 0 \quad \text{a.e. } \xi$$

$$b) \quad \int_{|x| > c|y|} \|T_g(x+y) - T_g(x)\|_H dx < c^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

こゝに $c > 0$ は定数である。このとき $1 < p < \infty$ に対して

$$\|f\|_{L^p} \sim \|g_t(f)\|_{L^p}.$$

上のような Littlewood-Paley 函数から我々の目的に沿う場合を導こう。

$$G \text{ とし } \begin{pmatrix} g & & 0 \\ & g & \\ 0 & & \ddots & g \end{pmatrix}, \quad g > 0$$

なる元からなる部分群とする。上の元を再び g であるわけでは $dg = g^{-1} dg$ である。

$K^\delta = \widehat{\varphi_\delta}$, $\delta = \sigma + i\tau$, $\sigma > -1$ とおく.

$$K^\delta(x) = 2^\delta \Gamma(\delta+1) V_{\frac{d}{2}+\delta}(|x|), \quad V_\mu(s) = \frac{J_\mu(s)}{s^\mu}$$

である. $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}^\delta(x) = K^\delta(x) - K^{\delta-1}(x)$ とおく. $\sigma > (d+1)/2$ のとき \mathcal{A}^δ は定理3の条件をみたすことが示される. 一方 $S_R^{\varphi_\delta} = S_R^\delta$ とおくと

$$T_g(f) = T_g^\delta(f) = S_g^\delta(f) - S_g^{\delta-1}(f)$$

であるから, 定理3によつて, $1 < p < \infty$, $\sigma > (d+1)/2$ のとき,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \sim \left\| \left(\int_0^\infty |S_g^\delta(f)(\cdot) - S_g^{\delta-1}(f)(\cdot)|^2 \frac{dg}{g} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{1/2} \quad (2)$$

(2) と Plancherel の定理によつて, (2) は $2d/(d+2\sigma-1) < p < 2d/(d-2\sigma+1)$, $1/2 < \sigma < (d+1)/2$ に対し成立することから導かれる (猪狩-倉坪 [] 参照).

次に, $g_\delta(f)$ を変形しよう. $q \geq 1$ に対して

$$G_{\delta,q}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |T_g^\delta(f)(x)|^q \frac{dg}{g} \right)^{1/q}, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$\text{こゝに} \quad T_g^\delta(f) = S_g^\delta(f) - S_g^{\delta-1}(f),$$

$$g_{\delta,q}(u)(x) = \left(\int_0^\infty |t_g^\delta(u)(x)|^q \frac{dg}{g} \right)^{1/q} \quad u \in C(\mathbb{T}^d)$$

$$\text{こゝに} \quad t_g^\delta(u) = s_g^\delta(u) - s_g^{\delta-1}(u),$$

とある.

3. 概収束問題と Littlewood-Paley 函数. 煩雑にやるのを避けるため $d \geq 2$, $2 \leq p < 2d/(d+1)$ とする.

$$S_*^\delta(f)(x) = \sup_R |S_R^\delta(f)(x)| \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

とある. $S_*^\delta(u)$ も同様にして定義される.

命題 1. $\|S_*^\delta(f)\|_{L^p} \leq \text{const} \|f\|_{L^p}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

が成り立つ, $S_R^\delta(f) \rightarrow f$ a.e. ($R \rightarrow \infty$).

仮定は, $\text{Re } \delta > (d-1)/2$, $1 \leq p \leq \infty$ に対して成り立つ.

命題 2 は S^δ と S^δ と置きかえても成り立つ. (E. M. Stein [12])

参照).

命題 2. $\alpha, \beta > 0$, $2\alpha > \beta - \alpha + 1 > 0$ とする. (A)

\Rightarrow (B) とある.

(A) $\sigma > \alpha$, $1/(\beta - \alpha + 1) > q > 1$ が成り立つ,

$$\|G_{\sigma, q}(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

(B) $\sigma > \beta$ が成り立つ,

$$\|S_*^{\sigma+i\tau}(f)\|_{L^p} \leq C' e^{\pi|\tau|} \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

ここに C は τ , f に無関係な定数である.

証明 の概略.

$$R^{2\beta+2i\tau} S_R^{\beta+i\tau}(f) = \frac{2\Gamma(\beta+i\tau+1)}{\Gamma(\beta-\sigma+i\tau+1)\Gamma(\sigma)} \int_0^R (R^2-r^2)^{\beta+i\tau-\sigma-2\sigma-1} r^{2\sigma-1} S_r^{\sigma-1}(f) dr.$$

$1/q + 1/q' = 1$ に対して Hölder の不等式を用いると

$$|S_R^{\sigma+i\tau}(f)| \leq C R^{-2\sigma} \left[\int_0^R (R^2 - \lambda^2)^{(\sigma'-\sigma)q'} \lambda^{(2\sigma-1)q'} d\lambda \right]^{1/q'} \left[\int_0^R |S_\lambda^{\sigma-1}(f)|^q d\lambda \right]^{1/q}.$$

上の式で $\sigma' > \beta$ ととり $\sigma > \alpha$ を十分大に近くとすれば, $q > 1/(\sigma' - \sigma + 1)$, $q > 1/(2\sigma)$ とおきかす

$$\begin{aligned} |S_R^{\sigma+i\tau}(f)| &\leq C \left[\frac{1}{R} \int_0^R |S_\lambda^{\sigma-1}(f)|^q d\lambda \right]^{1/q} \\ &\leq C \left\{ G_{\sigma,q}(f) + \dots + G_{\sigma+M,q}(f) + S_*^{\sigma+M}(f) \right\} \end{aligned}$$

とす. M を十分大きくと, τ , 仮定 (A) と命題 1 を用いると (B) が得られる. (証明終)

特に, $\alpha = \frac{1}{2} + d(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ のときを考えてみよう.

命題 3. $d \geq 2$, $2 > p > 2d/(d+1)$, $\alpha = \frac{1}{2} + d(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$

とす.

(A) $\sigma > \alpha$ として $1/(1-\alpha) > q \geq 2$ とおけば,

$$\|G_{\sigma,q}(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

(B) $\sigma > 0$ とおけば,

$$\|S_*^{\sigma+i\tau}(f)\|_{L^p} \leq c' e^{\pi|\tau|} \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d), \tau \in \mathbb{R}^d.$$

このとき, (A) \Rightarrow (B). 逆に (B) がすべての $2 > p > 2d/(d+1)$ に対して成り立つのは, (A) が成り立つ.

証明 の概略. 前半は命題 2 の特別の場合である. 後半を示す. 2 の (2) によつて

$\sigma_0 > 1/2$ ならば

$$\|G_{\sigma_0+i\tau, 2}(f)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}. \quad (3)$$

$\sigma_1 > 1$, $\lambda = 2d/(d+1)$ ならば,

$$\|G_{\sigma_1+i\tau, 2}(f)\|_{L^{\lambda_1}} \leq C e^{\pi|\tau|} \|f\|_{L^{\lambda_1}}. \quad (4)$$

任意の $\lambda_1 \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} G_{\sigma_1+i\tau, \lambda_1}(f) &= \left[\int_0^\infty |S_R^{\sigma_1+i\tau}(f) - S_R^{\sigma_1-1+i\tau}(f)|^{\lambda_1} \frac{dR}{R} \right]^{1/\lambda_1} \\ &\leq \left[S_*^{\sigma_1+i\tau}(f) + S_*^{\sigma_1-1+i\tau}(f) \right]^{(\lambda_1-2)/\lambda_1} \left[\int_0^\infty |S_R^{\sigma_1+i\tau}(f) - S_R^{\sigma_1-1+i\tau}(f)|^2 \frac{dR}{R} \right]^{1/\lambda_1}. \end{aligned}$$

ゆえに (3) と (4) により,

$$\|G_{\sigma_1+i\tau, \lambda_1}(f)\|_{L^{\lambda_1}} \leq C e^{\pi|\tau|} \|f\|_{L^{\lambda_1}}. \quad (5)$$

(3) と (5) に Stein の補間定理を用いると (A) が得られる。
(証明終)

従って, フーリエ変換の Riesz-Bochner 平均の収束の上で述べた問題は, 命題 3 (A) を示すことに帰着された。上で述べた議論はすべて フーリエ級数に対して成り立つ。したがって $S_R^\delta \in S_R^\delta$ で, $G_{\delta, q} \in g_{\delta, q}$ であることが出来る。

更に,

命題 4. $1 \leq p, q < \infty$, $\operatorname{Re} \delta > -1$ とする。そのとき

(A) \Leftrightarrow (B)。

$$(A) \quad \|G_{\delta, q}(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

$$(B) \quad \|g_{\delta, q}(u)\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^p} \quad u \in L^p(\mathbb{T}^d),$$

そこで (A) , (B) の定数 C は等しい。

証明は, $(A) \Rightarrow (B)$ は K. de Leeuw [4] の方法で,
 $(B) \Rightarrow (A)$ は 猪俣 [8] の方法でなされた。

命題 4 の (A) が成り立つようには現在知られてゐる最も
 正確な結果は,

$$1 < p \leq 2, \quad \sigma > \frac{1}{2} + d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right), \quad p/(p-1) > q \geq 2$$

である。

引用文献

- [1] L.Carleson and P.Sjölin, Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc, *Studia Math.*, 44(1972), 287-299.
- [2] J.-L.Clerc, Les sommes partielles de la decomposition en harmoniques spheriques, *C.R.Acad.Sc.Paris*, 274(1972), 59-61.
- [3] A.Cordoba, The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers, to appear.
- [4] K.de Leeuw, On L^p -multipliers, *Ann.of Math.*, 81(1965) 364-379.
- [5] C.Fefferman, The multiplier problem for the ball, *Ann.of Math.*, 94 (1971) 330-336.
- [6] ———, A note on spherical summation multipliers, *Israel J.M.*, 15 (1973) 44-52.

- [7] L.Hörmander, Oscillatory integrals and multipliers in FL^p , Ark.för Math., 11(1973)1-11.
- [8] S.Igari, Functions of L^p -multipliers, Tohoku M.J., 21(1969)304-320.
- [9] 猪狩 惺, 多重 α - L^p 級数の収束問題, 数研 25(1973)14-23.
- [10] S.Igari and S.Kuratsubo, A sufficient condition for L^p -multipliers, Pacific J.M., 38(1971)85-88.
- [11] P.Sjölin, Fourier multipliers and estimates of Fourier transform of measures carried by smooth curve, Studia Math., 51(1974)169-182.
- [12] E.M.Stein Localozation and summability of multiple Fourier series, Acta Math., 100(1958)93-147.
- [13] E.M.Stein, On limit of sequences of operators, Ann.of Math., 74 (1961)140-170.
- [14] P.A.Tomas, A restriction theorem for the Fourier transform, B.A.M.S., 81(1975)477-478.